第27卷 第1期　　工 程 数 学 学 报　　Vol. 27 No. 1
2010年02月　　CHINESE JOURNAL OF ENGINEERING MATHEMATICS　　Feb. 2010

文章编号:1005-3085(2010)01-0092-07

随机环境下单边二重随机游动*

王伟刚[1]，胡迪鹤[2]

(1- 浙江工商大学统计与数学学院，杭州 310018； 2- 武汉大学数学与统计学院，武汉 430072)

摘　要: 为了研究随机环境下单边二重随机游动的极限问题，也即随机环境下含有反射壁的二重随机游动的极限问题，本文利用二重随机游动的首达时与分枝链的关系，给出了当随机环境平稳遍历时，在几乎处处的环境下该过程常返，正常返及大数定律的条件。

关键词: 随机环境；二重随机游动；常返；正常返

分类号: **AMS**(2000) 60J10; 60J80　　**中图分类号**: O211.62　　**文献标识码**: A

1　引言

作为概率论的一个重要分支，随机环境中的随机过程[1-2]已引起了人们广泛的兴趣。目前，已经有很多学者对随机环境下的随机游动进行了研究[3-4]，不论是依时的随机环境，还是依时依空的随机环境都有很多深刻的结果。相比之下，关于随机环境下二重随机游动的文章却很少。Szász，Tóth 和 Alili 分别在文献 [5] 和文献 [6] 中研究了当环境独立同分布和环境平稳遍历时双边二重随机游动。其中，文献 [6] 中给出了随机环境中二重随机游动的首达时与随机环境下的分枝链[7-8]的联系，并利用它们的关系给出了在几乎处处的环境下，过程的极限性质和大数定律。本文研究随机环境下的单边二重随机游动，并指出与修正了文献 [6] 在定理 2.1 中的证明错误。

2　定义与符号

定义 1　令 $\xi=\{(\lambda_j,\mu_j)\}_{j\geq1}$ 为一列定义在概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上，取值于 $(0,1)^2$ 上的随机变量。在给定 ξ 的情况下，若 $\{X_n\}_{n\geq0}$ 为时齐二重随机游动，且满足 $P(X_0=0,X_1=1)=1$，当 $n\geq1,\ j\geq1$ 时

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1}=1\mid X_{n-1}=1,\,X_n=0,\,\xi)=1,\\
&P(X_{n+1}=j+1\mid X_{n-1}=j-1,\,X_n=j,\,\xi)=\lambda_j,\\
&P(X_{n+1}=j-1\mid X_{n-1}=j-1,\,X_n=j,\,\xi)=1-\lambda_j,\\
&P(X_{n+1}=j-1\mid X_{n-1}=j+1,\,X_n=j,\,\xi)=\mu_j,\\
&P(X_{n+1}=j+1\mid X_{n-1}=j+1,\,X_n=j,\,\xi)=1-\mu_j,
\end{aligned}
$$

则称 $\{X_n\}_{n\geq0}$ 为随机环境下的单边二重随机游动。其中 ξ 成为随机环境。

收稿日期: 2007-02-05.　**作者简介**: 王伟刚 (1981年1月生)，男，博士. 研究方向：随机环境下的随机过程.
***基金项目**: 国家自然科学基金 (10771185)；浙江省自然科学基金 (Y6090172).

在不引起混淆的情况下，有时我们认为过程从 X_{-1} 开始，并记

$$P_n^\xi = P\big(\cdot \mid X_{-1} = n-1,\, X_0 = n,\, \xi\big),$$

由于对任意的 $j \ge 1,\, 0 < \lambda_j < 1,\, 0 < \mu_j < 1$，所以对任意的 ξ, $\{X_n\}_{n\ge 0}$ 在 P_0^ξ 下为不可约二重马氏链。令 ξ 关于 P 的分布为 π, E^π 为关于 π 所对应的数学期望。

3　主要结果

令

$$T_0 = \begin{cases} \min\{k \ge 1,\, X_k = 0\}, & 若\ \{k \ge 1,\, X_k = 0\}\ 非空, \\ +\infty, & 否则. \end{cases}$$

易知 T_0 为从0出发首次返回0的停时。令

$$U_j = \#\big\{k,\, 0 \le k < T_0,\, X_k = j,\, X_{k+1} = j+1\big\}, \quad j \ge 0,$$

则 $T_0 = 2\sum_{j=0}^{+\infty} U_j$。由于 U_j 为非负整值随机变量，故 $T_0 < \infty$ 当且仅当 $\lim_{j\to\infty} U_j = 0$。

引理1　对任意的 ξ，在 P_0^ξ 下，过程 $\{U_j\}_{j\ge 0}$ 为依时分枝过程，且每一代繁殖的生成函数为

$$f_0(s) = s,$$
$$f_n(s) = 1 - \lambda_n + \frac{\lambda_n[q_n\mu_n + (1-q_n)]s}{1-(1-\mu_n)q_n s}, \quad 0 \le s \le 1, \quad n \ge 1,$$

其中

$$q_n = P_{n+1}^\xi\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{X_k = n\}\Big).$$

证明　对任意的环境 ξ，我们有

$$P_0^\xi(U_0 = 1) = 1,$$

$$P_0^\xi(U_1 = k) = \begin{cases} 1-\lambda_1, & k = 0, \\ \lambda_1 q_1[(1-\mu_1)q_1]^{k-1}\mu_1 + \lambda_1 q_1[(1-\mu_1)q_1]^{k-1}(1-\mu_1)(1-q_1), & k \ge 2. \end{cases}$$

当 $j \ge 2$ 时，我们分析连续两次 $j-1 \to j$ 之间 $j \to j+1$ 发生次数的条件概率。记连续两次 $j-1 \to j$ 之间发生 k 次 $j \to j+1$ 的概率为 $q_j(k)$，则

$$q_j(k) = \begin{cases} 1-\lambda_j, & k = 0, \\ \lambda_j q_j[(1-\mu_j)q_j]^{k-1}\mu_j + \lambda_j q_j[(1-\mu_j)q_j]^{k-2}(1-\mu_j)(1-q_j), & k \ge 1. \end{cases}$$

故在给定 $U_0, U_1, \cdots, U_j$ 的条件下，U_{j+1} 为 U_j 个独立同分布随机变量 $A_1, A_2, \cdots$ 的和，且它们有公共分布

$$P_0^\xi(A_1 = k) = \begin{cases} 1-\lambda_j, & k = 0, \\ \lambda_j q_j[(1-\mu_j)q_j]^{k-1}\mu_j + \lambda_j q_j[(1-\mu_j)q_j]^{k-2}(1-\mu_j)(1-q_j), & k \ge 1. \end{cases}$$

故在 P_0^ξ 下 $\{U_j\}_{j\geq 0}$ 为依时的分枝过程，且第 n 代繁殖的生成函数 $f_n(s)$ 为当 $n=0$ 时 $f_0(s)=s$。当 $n\geq 1$ 时

$$\begin{aligned} f_n(s) &= 1-\lambda_n+\sum_{k=1}^{+\infty}\lambda_n q_n[(1-\mu_n)q_n]^{k-1}\mu_n s^k+\lambda_n q_n[(1-\mu_n)q_n]^{k-2}(1-\mu_n)(1-q_n)s^k \\ &= 1-\lambda_n+\frac{\lambda_n[q_n\mu_n+(1-q_n)]s}{1-(1-\mu_n)q_n s}, \quad 0\leq s\leq 1. \end{aligned}$$

引理得证。

注1 当给定 ξ 时，q_n 为已知的常数。

注2 本引理改正了文献 [6] 在定理2.1中的证明错误。

记 $q(\xi)=P_0^\xi(\lim_{j\to\infty}U_j=0)$ 为 ξ 已知时分枝链 $\{U_j\}_{j\geq 0}$ 的灭绝概率。

定理1 设 $\xi=\{(\lambda_j,\mu_j)\}_{j\geq 1}$ 平稳遍历，则

(i) 当 $E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\leq 0$ 时，对 $\pi-a.s.\ \xi$，$\{X_n\}_{n\geq 0}$ 在 P_0^ξ 下常返。

(ii) 当 $E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)>0$ 时，对 $\pi-a.s.\ \xi$，$\{X_n\}_{n\geq 0}$ 在 P_0^ξ 下非常返。

证明 由上面的分析知 $T_0<\infty$ 当且仅当 $\lim_{j\to\infty}U_j=0$。所以

$$P_0^\xi(T_0<\infty)=P_0^\xi\Big(\lim_{j\to\infty}U_j=0\Big)=q(\xi),$$

又

$$f_n'(1)=\frac{\lambda_n}{q_n\mu_n+1-q_n}.$$

由文献 [7] 的推论1和定理3及 ξ 平稳遍历知 $q(\xi)=1$，关于 π 几乎处处成立当且仅当

$$E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{q_1\mu_1+1-q_1}\right)\leq 0.$$

(i) 当 $E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)\leq 0$ 时。

$$E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{q_1\mu_1+1-q_1}\right)=E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1/\mu_1}{q_1+(1-q_1)/\mu_1}\right)\leq E^\pi\ln(\lambda_1/\mu_1)\leq 0.$$

第一个不等式是因为

$$f(x)=\ln\frac{\lambda_1/\mu_1}{q_1+(1-q_1)/x}, \quad x>0,$$

关于 x 单调递增且 $\mu_1\leq 1$。故有 $P_0^\xi(T_0<\infty)=1$，关于 π 在条件 ξ 下几乎处处成立。也即关于 π 在条件 ξ 下几乎处处 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 常返。

(ii) 当 $E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)>0$ 时。

由 ξ 平稳遍历知关于 π 几乎处处有 $q(\xi)=1$ 或关于 π 几乎处处有 $q(\xi)<1$。假设关于 π 几乎处处有 $q(\xi)=1$，此时关于 π 在条件 ξ 下几乎处处 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 常返。故关于 π 几乎处处有 $q_n=1$，对任意的 $n\geq 0$，所以

$$E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{\mu_1}\right)=E^\pi\ln\left(\frac{\lambda_1}{q_1\mu_1+1-q_1}\right)\leq 0,$$

与题设矛盾。故关于 π 几乎处处有 $q(\xi)<1$，此即关于 π 在条件 ξ 下几乎处处 $\{X_n\}_{n\geq 0}$ 为非常返。定理得证。

构造概率空间 $(\Omega,\mathcal{F},P)$ 上的随机环境下双边二重随机游动 $\{\tilde{X}_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$，满足转移概率

$$\begin{aligned}
&P(\tilde{X}_{n+1}=j+1 \mid \tilde{X}_{n-1}=j-1,\, \tilde{X}_n=j,\, \tilde{\xi})=\tilde{\lambda}_j,\\
&P(\tilde{X}_{n+1}=j-1 \mid \tilde{X}_{n-1}=j-1,\, \tilde{X}_n=j,\, \tilde{\xi})=1-\tilde{\lambda}_j,\\
&P(\tilde{X}_{n+1}=j-1 \mid \tilde{X}_{n-1}=j+1,\, \tilde{X}_n=j,\, \tilde{\xi})=\tilde{\mu}_j,\\
&P(\tilde{X}_{n+1}=j+1 \mid \tilde{X}_{n-1}=j+1,\, \tilde{X}_n=j,\, \tilde{\xi})=1-\tilde{\mu}_j.
\end{aligned}$$

其中 $\tilde{\xi}=\{(\tilde{\lambda}_j,\tilde{\mu}_j;j\in\mathbb{Z})\}$ 为随机环境。$\tilde{\xi}$ 平稳遍历，其分布为 $\tilde{\pi}$ 且 $\{(\tilde{\lambda}_j,\tilde{\mu}_j)\}_{j\geq 1}$ 与 $\{(\lambda_j,\mu_j)\}_{j\geq 1}$ 有相同的分布。令

$$P_0^{\tilde{\xi}}=P(\cdot \mid X_{-1}=-1,\, X_0=0,\, \tilde{\xi}),\quad \tilde{T}_n=\inf\{k>0;\, \tilde{X}_k=n\},\quad n\in\mathbb{Z}.$$

$E^{\tilde{\pi}}$ 为关于 $\tilde{\pi}$ 所对应概率的期望。

定理 2　若

$$E^{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{\mu_2}{\lambda_2}\cdots\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}<+\infty,$$

则关于 π 几乎处处在条件 ξ 下。$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=v$，$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}=v^{-1}$。以 P_0^{ξ} 概率一成立。其中

$$v=\Big[1+2E^{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{\mu_2}{\lambda_2}\cdots\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}\Big]^{-1}.$$

证明　由于 $\tilde{\xi}$ 的分量限制在 $j\geq 1$ 上与 ξ 同分布及 $\tilde{\xi}$ 平稳知

$$\begin{aligned}
E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\lambda}_0}\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1}\cdots\frac{1-\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k} &= E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1}\frac{\tilde{\mu}_2}{\tilde{\lambda}_2}\cdots\frac{1-\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k}\\
&= E^{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{\mu_2}{\lambda_2}\cdots\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}<+\infty,
\end{aligned}$$

所以由参考文献 [6] 定理 2.2 知，关于 $\tilde{\pi}$ 几乎处处在条件 $\tilde{\xi}$ 下

$$P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to+\infty}\frac{\tilde{X}_n}{n}=\tilde{v}\Big)=1,$$

其中

$$\tilde{v}=\Big[E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_0}{\tilde{\lambda}_0}\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1}\cdots\frac{1-\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k}\Big]^{-1}=v.$$

所以

$$P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to\infty}\tilde{X}_n=+\infty\Big)=1. \tag{1}$$

令

$$\tilde{\sigma}=\inf\{n\geq 0,\, \forall\, k\geq n,\, \tilde{X}_k\geq 1\},\quad \sigma=\inf\{n\geq 0,\, \forall\, k\geq n,\, X_k\geq 1\},$$

由(1)知$P_0^{\tilde{\xi}}(\tilde{\sigma}<+\infty)=1$。令$\xi=\tilde{\xi}|_{j\geq 1}$。则

$$\begin{aligned}P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{X}_n}{n}=\tilde{v}\Big) &= P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{X}_n}{n}=v,\ \bigcup_{k=1}^{+\infty}\{\tilde{\sigma}=k\}\Big)=\sum_{k=1}^{+\infty}P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{X}_n}{n}=v,\ \tilde{\sigma}=k\Big)\\ &=\sum_{k=1}^{+\infty}P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{X}_n}{n}=v\,\Big|\,\tilde{\sigma}=k\Big)P_0^{\tilde{\xi}}(\tilde{\sigma}=k)\\ &=\sum_{k=1}^{+\infty}P_0^{\xi}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}\,\Big|\,\sigma=k\Big)P_0^{\xi}(\sigma=k)\\ &=P_0^{\xi}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=v,\ \bigcup_{k=1}^{+\infty}\{\sigma=k\}\Big)=P_0^{\xi}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=v\Big)=1.\end{aligned}$$

令

$$A=\Big\{\xi;P_0^{\xi}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=v\Big)<1\Big\},$$

若$\pi(A)>0$，令

$$\tilde{A}=\prod_{k=-\infty}^{0}\big[(0,1)^2\big]^k\cdot A.$$

则$\tilde{\pi}(\tilde{A})=\pi(A)>0$，且任意$\tilde{\xi}\in\tilde{A}$有

$$P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{X}_n}{n}=\tilde{v}\Big)\leq P_0^{\xi}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=v\Big)<1.$$

这与

$$\tilde{\pi}\Big\{\tilde{\xi};P_0^{\tilde{\xi}}\Big(\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{X}_n}{n}=\tilde{v}\Big)=1\Big\}=1$$

矛盾，故$\pi(A)=0$。此即，关于π几乎处处在ξ条件下，$\lim_{n\to\infty}\frac{X_n}{n}=v$，以$P_0^{\xi}$概率一成立。

从而由文献[3]知，关于π几乎处处在ξ条件下，$\lim_{n\to\infty}\frac{T_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{X_n}=v^{-1}$，以$P_0^{\xi}$概率一成立。定理得证。

定理3 设ξ平稳遍历，则

(i) 若$E^{\pi}\ln\frac{\lambda_1}{\mu_1}<0$，则关于$\pi$几乎处处在$\xi$条件下，$\{X_n\}_{n\geq 0}$在$P_0^{\xi}$下正常返。

(ii) 若$E^{\xi}\ln\frac{\lambda_1}{\mu_1}=0$，则关于$\pi$几乎处处在$\xi$条件下，$\{X_n\}_{n\geq 0}$在$P_0^{\xi}$下零常返。

证明 (i) 由定理1，当$E^{\pi}\ln\frac{\lambda_1}{\mu_1}<0$时，关于$\pi$几乎处处在$\xi$条件下，$\{X_n\}_{n\geq 0}$在$P_0^{\xi}$下常返。所以

$$q_n(\xi)=P_{n+1}^{\xi}\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty}\{X_k=n\}\Big)=1,\quad \forall\, n\geq 1.$$

故

$$\begin{aligned}E_0^{\xi}(T_0) &= E_0^{\xi}\Big(2\sum_{j=0}^{+\infty}U_j\Big)=2\Big(1+\sum_{j=1}^{+\infty}E_0^{\xi}U_j\Big)\\ &=2\Big(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\prod_{k=1}^{j}\frac{\lambda_k}{q_k\mu_k+1-q_k}\Big)=2\Big(1+\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda_1}{\mu_1}\frac{\lambda_2}{\mu_2}\cdots\frac{\lambda_j}{\mu_j}\Big).\end{aligned}$$

因为ξ平稳遍历，所以关于π几乎处处在ξ条件下

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\lambda_i}{\mu_i}=E^{\pi}\ln\frac{\lambda_1}{\mu_1}\triangleq a.$$

故对$0<\varepsilon<-E^{\pi}\ln\frac{\lambda_1}{\mu_1}$，存在$N>0$，对任意的$n>N$有

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln\frac{\lambda_i}{\mu_1}<a+\varepsilon<0.$$

此时

$$\frac{\lambda_1}{\mu_1}\frac{\lambda_2}{\mu_2}\cdots\frac{\lambda_n}{\mu_n}<\mathrm{e}^{n(a+\varepsilon)},\quad \sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\lambda_1}{\mu_1}\frac{\lambda_2}{\mu_2}\cdots\frac{\lambda_n}{\mu_n}<+\infty.$$

故有$E_0^{\xi}(T_0)<+\infty$。关于π几乎处处成立。

(ii)　假设

$$E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1}\frac{\tilde{\mu}_2}{\tilde{\lambda}_2}\cdots\frac{\tilde{\mu}_{k-1}}{\tilde{\lambda}_{k-1}}\frac{1-\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k}=E^{\pi}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\mu_1}{\lambda_1}\frac{\mu_2}{\lambda_2}\cdots\frac{\mu_{k-1}}{\lambda_{k-1}}\frac{1-\lambda_k}{\lambda_k}<+\infty,$$

则

$$\begin{aligned}E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1}\frac{\tilde{\mu}_2}{\tilde{\lambda}_2}\cdots\frac{\tilde{\mu}_{k-1}}{\tilde{\lambda}_{k-1}}\frac{1-\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k} &= \sum_{k=0}^{+\infty}E^{\tilde{\pi}}\frac{\tilde{\mu}_{-k}}{\tilde{\lambda}_{-k}}\frac{\tilde{\mu}_{-k+1}}{\tilde{\lambda}_{-k+1}}\cdots\frac{\tilde{\mu}_{-1}}{\tilde{\lambda}_{-1}}\frac{1-\tilde{\lambda}_0}{\tilde{\lambda}_0}\\ &= E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_{-k}}{\tilde{\lambda}_{-k}}\frac{\tilde{\mu}_{-k+1}}{\tilde{\lambda}_{-k+1}}\cdots\frac{\tilde{\mu}_{-1}}{\tilde{\lambda}_{-1}}\frac{1-\tilde{\lambda}_0}{\tilde{\lambda}_0}<+\infty.\end{aligned}$$

故

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_{-k}}{\tilde{\lambda}_{-k}}\frac{\tilde{\mu}_{-k+1}}{\tilde{\lambda}_{-k+1}}\cdots\frac{\tilde{\mu}_{-1}}{\tilde{\lambda}_{-1}}<+\infty,\quad \tilde{\pi}-a.s.\ \tilde{\xi}.$$

从而

$$\ln\frac{\tilde{\mu}_{-k}}{\tilde{\lambda}_{-k}}\frac{\tilde{\mu}_{-k+1}}{\tilde{\lambda}_{-k+1}}\cdots\frac{\tilde{\mu}_{-1}}{\tilde{\lambda}_{-1}}=\sum_{j=-k}^{-1}\ln\frac{\tilde{\mu}_j}{\tilde{\lambda}_j}\to-\infty,\quad \tilde{\pi}-a.s.\ \tilde{\xi}.$$

由文献[9]引理3.6知

$$E^{\tilde{\pi}}\ln\frac{\tilde{\mu}_{-1}}{\tilde{\lambda}_{-1}}=E^{\pi}\frac{\mu_1}{\lambda_1}<0\quad 与\quad E^{\pi}\ln\frac{\lambda_1}{\mu_1}=0,$$

矛盾。故

$$E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\tilde{\mu}_1}{\tilde{\lambda}_1}\cdots\frac{\tilde{\mu}_{k-1}}{\tilde{\lambda}_{k-1}}\frac{1-\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\lambda}_k}=+\infty.$$

同理可得

$$E^{\tilde{\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1-\tilde{\mu}_0}{\tilde{\lambda}_0}\frac{\tilde{\lambda}_1}{\tilde{\mu}_1}\cdots\frac{\tilde{\lambda}_k}{\tilde{\mu}_k}=+\infty.$$

由文献[6]定理2.2 (iii)知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\tilde{T}_{-n}}{n}=+\infty.\tag{2}$$

令 $\tilde{\tau}_{-n} = \inf\{K > T_{-n+1}, \tilde{X}_k = \tilde{T}_n\}$，则 $\tilde{T}_{-n} = \sum_{k=1}^{n} \tilde{\tau}_{-k}$，且 $\tilde{\tau}_{-k}$，$k \geq 1$ 独立同分布。故由 (2) 知

$$E_0^{\tilde{\xi}}\tilde{T}_{-1} = E_0^{\tilde{\xi}}\tilde{\tau}_{-1} = +\infty.$$

故 $\tilde{\pi}\{\tilde{\xi}; E_0^{\tilde{\xi}}\tilde{T}_{-1} = +\infty\} = 1$，由 $\tilde{\xi}$ 平稳知

$$\tilde{\pi}\{\tilde{\xi};\ E_1^{\tilde{\xi}}\tilde{T}_0 = +\infty\} = 1.$$

令 $\xi = \tilde{\xi}|_{j\geq 1}$，则

$$E_1^{\xi}T_0 = E_1^{\tilde{\xi}}\tilde{T}_0 = +\infty, \quad \tilde{\pi} - a.s.\ \tilde{\xi}.$$

所以类似于定理 2 (i) 的证明，关于 π 几乎处处在 ξ 条件下，$E_1^{\xi}T_0 = +\infty$。

参考文献：

[1] Cogburn R. Markov chains in random rnvironments: the case of Markovian environments[J]. Annals of Probability, 1980, 8: 908-916
[2] Cogburn R. The ergodic theory of Markov chains in random environments[J]. Z Wahrach Verw Gebiete, 1984, 66: 109-128
[3] Solomon F. Random walks in a random environment[J]. Annals of Probability, 1975, 8(1): 1-31
[4] Kozlov S M. The method of averaging and walks in inhomogenious environments[J]. Russian Math Surveys, 1985, 40(2): 73-145
[5] Szász D, Tóth B. Peresist random walks in *one-deminsional random environment*[J]. *Journal of Statistical* Physics, 1984, 37(1): 27-38
[6] Alili S. Persistent random walks in stationary environment[J]. Journal of Statistical Physics, 1999, 94(3): 469-494
[7] Athreya K B, Karlin S. On branching processes with random environments: I extinction probabilities[J]. Ann Math Statist, 1971, 42: 1499-1520
[8] Athreya K B, Karlin S. On branching processes with random environments: I extinction probabilities[J]. Annals of Mathematical Statistics, 1971, 42(6): 1843-1858
[9] Guivarc'h Y Raugi A. Frontière de Furstunberg properiéties de constraction et théorèmes de convergence[J]. Z Wahrach Verw Gebiete, 1987, 69: 187-242

Random Walks of Single Side with Order 2 in Random Environments

WANG Wei-gang[1], HU Di-he[2]

(1- School of Statistics and Mathematics, Zhejiang Gongshang University, Hangzhou 310018;
2- School of Mathematics and Statistics, Wuahn University, Wuhan 430072)

Abstract: In order to study the limit problem to a single side for a random walk with order 2 in random environments, we use the relationship between the first hitting time of the random walk with the branching chains, and get the conditions that imply the recurrence, the positive recurrence and the law of large number of that process, when the environments are stationary and ergodic, respectively.
Keywords: random environments; random walk with order 2; recurrence; positive recurrence

Received: 05 Feb 2007. **Accepted:** 19 Jan 2008.
Foundation item: The National Natural Science Foundation of China (10771185); the Natural Science Foundation of Zhejiang Province, China (Y6090172).